SISTEMI LINEARI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI 21/12/201

Sistemi lineari

(Lo) $\quad \underline{x}' = A(t)\,\underline{x} \qquad \underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^t \;;\; A(t) \in M_n(\mathbb{R}) \quad \forall t \in I \subseteq \mathbb{R}$

$$\overset{\shortparallel}{(a_{jk}(t))}, \quad a_{jk} : I \mapsto \mathbb{R}$$

(Sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)\,x_1 + \dots + a_{1n}(t)\,x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)\,x_1 + \dots + a_{nn}(t)\,x_n \end{cases}$$

Oss. $\mathcal{S} =: \{$ soluzioni di (Lo) in $I \}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$
Se $\underline{x}, \underline{y} \in \mathcal{S}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}$ è soluzione?

$$(\alpha\underline{x} + \beta\underline{y})' \underset{\substack{\text{linearità} \\ \text{dell'operatore} \\ \text{derivata}}}{=} \alpha\underline{x}' + \beta\underline{y}' = \alpha A\underline{x} + \beta A\underline{y} \underset{\substack{\text{linearità} \\ \text{del prodotto} \\ \text{di matrici}}}{=} A(\alpha\underline{x} + \beta\underline{y})$$

Oss. Se $A \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^{n \times n})$ (cioè i coeff. della funz. $A(t)$ è continua)
$[a_{jk} \in \mathcal{C}(I),\ j, k = 1, \dots, n]$

allora
$\forall (t_0, \underline{x}^0) \in I \times \mathbb{R}^n$, il (PC) $\begin{cases} \underline{x}' = A(t)\underline{x} \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}^0 \end{cases}$ ha una e una sola sol. definita in tutto I.

Dim. $[r_1, r_2] \subseteq I$ $\quad$ [come nel caso scalare, $|\underline{f}(t, \underline{x})| \le C_1 |\underline{x}| + C_2$]

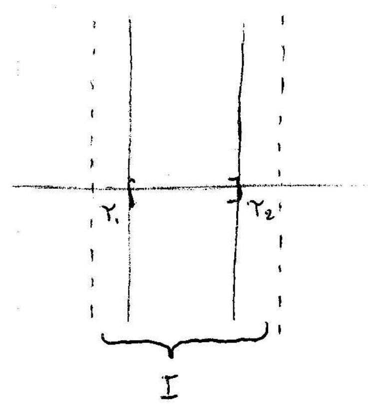
$$|A(t)\underline{x}| \le \|A(t)\|\,|\underline{x}| \le \|A(t)\|_{HS}\,|\underline{x}| \le C_{r_1, r_2}\,|\underline{x}|$$

$$\|A(t)\|_{HS} = \Big(\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(t)^2\Big)^{1/2} \quad \text{(fissata una base canonica)}$$

$a_{jk}(t)$ è continua su $[r_1, r_2]$, dunque ivi limitata

$$\|A(t)\|_{HS} \le C_{r_1, r_2} \quad \forall t \in [r_1, r_2]$$

TEUG
$\Rightarrow \exists!\ \varphi$ sol. di (PC) su $[r_1, r_2]$



Teorema $\boxed{\dim \mathcal{S} = n}$

Dim. $T : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}^n \qquad T\varphi = \underset{\in \mathbb{R}^n}{\varphi(t_0)}$
$t_0 \in I$ fissato

(i) T è lineare: ovvio
(ii) T è iniettiva $\iff \operatorname{Ker} T = 0$
È suff. mostrare che $T\underline{0} = \underline{0} \Rightarrow \varphi = 0$ $[\varphi(t) = 0 \quad \forall t \in I]$
Allora φ risolve (PC) $\begin{cases} \underline{x}' = A(t)\underline{x} \\ \underline{x}(t_0) = \underline{0} \end{cases}$
La soluzione identicamente nulla è soluzione.
Ma è anche l'unica sol. di (PC) $\Rightarrow \varphi = \underline{0}$

(iii) T è suriettiva
$\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, consideriamo (PC) $\begin{cases} \underline{x}' = A(t)\underline{x} \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}^0 \end{cases}$; ha una e una sol. sol. φ definita su I, $\varphi \in \mathcal{S}$
e $T\varphi = \varphi(t_0) = \underline{x}^0$

T è un isomorfismo $\Rightarrow$ dim $\mathcal{S} = n$

Def. $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$ definite su $I \subseteq \mathbb{R}$. La matrice

$W(t) = [\varphi^1_{(t)} \dots, \varphi^n_{(t)}]$ si chiama matrice wronskiana di $\varphi_1^1, \dots \varphi^n$

$\forall t \in I \quad W(t) \in M_n(\mathbb{R})$
$\det W(t) =: w(t) \quad \forall t \in I$ si chiama wronskiano di $\varphi^1, \dots, \varphi^n$

Es. $\varphi^1(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ 2t \end{bmatrix} \qquad \varphi^2(t) = \begin{bmatrix} t\,|t| \\ 2\,|t| \end{bmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$W = \begin{bmatrix} t^2 & t|t| \\ 2t & 2|t| \end{bmatrix} \qquad w(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$ ($\varphi^1(t), \varphi^2(t)$ sono lin. indip. puntualmente sono lin. dip. ma non $\exists c_1, c_2$ t.c. $c_1\varphi^1 + c_2\varphi^2 = 0 \quad \forall t \in I$

φ^1, φ^2 sono lin. ind: supp. $\exists c_1, c_2$: $c_1\varphi^1(t) + c_2\varphi^2(t) = 0$
Posto $t = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$
$t = -1 \Rightarrow c_1 - c_2 = 0$ $\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

Sono lin. dip. su $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}^-$, ma globalmente definite su $\mathbb{R}$ no!

Oss. $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ funzioni lin. dipendenti in $I \Rightarrow w(t) = 0 \quad \forall t \in I$

$\exists c_1, \dots c_n$ non tutte nulle t.c.

$$\begin{cases} c_1\varphi_1^1(t) + \dots + c_n\varphi_1^n(t) = 0 \\ \vdots \\ c_1\varphi_n^1(t) + \dots + c_n\varphi_n^n(t) = 0 \end{cases} \qquad \forall t \in I$$

Poiché il sistema ha una soluz. non nulla, $w(t) = 0$
Oss. L'annullarsi del wronskiano di $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ è cond. N ma non S per la dip. lineare di $\varphi^1, \dots, \varphi^n$

Teorema CNS affinché n soluzioni su I di (LO) sono lin. indip. è che $w(t) \neq 0 \quad \forall t \in I \quad [\underline{x}' = A(t)\underline{x},\ A \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})]$

(dunque φ_1, φ_2 non possono essere soluzioni di un sist. lin. om. In $\mathcal{S}$ il wronskiano ha una "proprietà" che in un generico spazio di funzioni non possiede)

Dim. $\varphi^1, \dots \varphi^n$ sol. di (LO)
. Se sono lin. ind. $\Rightarrow w(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$
Per assurdo: se $\exists t_0 \in I$: $w(t_0) = 0$, allora il sistema

$$c_1\varphi^1(t_0) + \dots + c_n\varphi^n(t_0) = 0$$

ha una sol. $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n$ non nulla

→ f.ne $\bar c_1 \varphi^1 + \dots \bar c_n \varphi^n$
risolve

$$(PC)\begin{cases} \underline{x}' = A(t)\underline{x} \\ \underline{x}(t_0) = \underline{0} \end{cases} \Rightarrow \bar c_1 \varphi^1 + \dots + \bar c_n \varphi^n = 0 \quad \forall t \in I$$

$$\Rightarrow \varphi^1, \dots, \varphi^n \text{ sono lin. ~~indip~~.}$$

Se $w(t) \neq 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow \varphi^1, \dots, \varphi^n$ sono lin. indip.

Per assurdo: se non lo fossero $\exists \bar c_1, \dots \bar c_n$ non tutte nulle
$\bar c_1 \varphi^1 + \dots + \bar c_n \varphi^n \equiv 0$ in I
In particolare, scelto $t_0 \in I$, il sistema

$$c_1 \varphi^1(t_0) + \dots + c_n \varphi^n(t_0) = \underline{0}$$

avrebbe sol. non nulla $\bar c_1 \dots \bar c_n \Rightarrow w(t_0) = 0$

Se w è il wronskiano di n sol., allora $w(t_0) \neq 0 \Rightarrow w(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

Sistema lineare non omogeneo (LNO)
$\underline{x}' = A(t)\underline{x} + \underline{b}(t)$ $\qquad A = (a_{jk}) \qquad a_{jk} : I \mapsto \mathbb{R}$
$\underline{b} : I \mapsto \mathbb{R}^n$

Oss. se $\underline{b} \neq 0$. le sol. di (LNO) non costituiscono uno sp. vettoriale
Oss. Sia Ψ^* una qualunque soluzione di (LNO). Allora tutte e sole le sol. di (LNO) sono della forma

$$\Psi(t) = \varphi(t) + \Psi^*(t) \qquad \forall t \in I$$

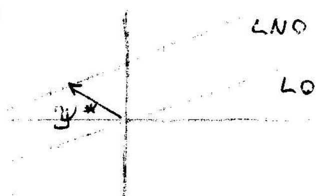
dove φ è una qualunque sol. di (LO) associata $[\underline{x}' = A(t)\underline{x}]$

$$\begin{aligned} \Psi'(t) = \varphi'(t) + (\Psi^*)'(t) &= A(t)\varphi(t) + A(t)\Psi^*(t) + b(t) \\ &= A(t)(\varphi(t) + \Psi^*(t)) + b(t) \\ &= A(t)\Psi(t) + b(t) \end{aligned}$$

Viceversa, se $\Psi^1, \cancel{\Psi^2}$ sono sol. di (LNO) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} (\Psi^1 - \Psi^*)'(t) &= (\Psi^1)'(t) - (\Psi^*)'(t) \\ &= A(t)\Psi^1(t) + \cancel{b(t)} - A(t)\Psi^*(t) - \cancel{b(t)} \\ &= A(t)[\Psi^1(t) - \Psi^*(t)] \end{aligned}$$

(Senza ipotesi sui coeff. di continuità)



Oss. Se $A \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $\underline{b} \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$
allora $\forall (t_0, \underline{x}^0) \in I \times \mathbb{R}^n$
il $(PC)\begin{cases} \underline{x}' = A(t)\underline{x} + \underline{b}(t) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}^0 \end{cases}$ ha una e una sol. su tutto I

Dim. $|A(t)\underline{x} + b(t)| \leq |A(t)\underline{x}| + |\underline{b}(t)|$ (perché b è cont. su comp.)
$\leq C_1 |\underline{x}| + C_2 \qquad \forall (t, \underline{x}) \in [\Upsilon_1, \Upsilon_2] \times \mathbb{R}^n$

Def. $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ sol. lin. indip. di (LO)
si chiama <u>sistema fondamentale</u> di sol.

Sistemi (LOCC) <a coeff. costante>

$\underline{x}' = A\underline{x}$ $\quad A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - x_3 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 + 6x_3 \\ x_3' = x_2 - x_3 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow T^k := \underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{k\text{-volte}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

$|||T||| < \infty$

$|||T^k||| \leq |||T|||^k$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\left|\left| \frac{T^k}{k!} \right|\right|\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|||T|||^k}{k!} = e^{||T||} < \infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} \frac{T^k}{k!} \text{ è conv. in } \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

RICORDA! $\sum |a_n|$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ conv.

$\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ $\quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ è conv.

$\left| \sum_{k=p}^{q} x_k \right| \leq \sum_{k=p}^{q} |x_k| < \varepsilon$ per p, q suff. grandi

$\Rightarrow s_n = \sum_{k=1}^{N} x_k$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ $\underset{\mathbb{R} \text{ è completo}}{\Rightarrow}$ $\{s_n\}$ conv. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ è conv

Analogamente per un qualunque X spazio di Banach ove si sostituisca a $|\cdot|$, $||\cdot||$ (norma di X)

[posto $S_N := \sum_{k=0}^{N} \frac{T^k}{k!}$; $\exists S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ t.c. $|||S_N - S||| \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

$\{S_N\}$ è di Cauchy $\Leftrightarrow \lim_{p,q \to +\infty} \left|\left| \sum_{k=p}^{q} \frac{T^k}{k!} \right|\right| = 0$

$$\left|\left| \sum_{k=p}^{q} \frac{T^k}{k!} \right|\right| \leq \sum_{k=p}^{q} \left|\left| \frac{T^k}{k!} \right|\right| \leq \sum_{k=p}^{q} \frac{||T||^k}{k!} \xrightarrow[p,q \to +\infty]{} 0$$

(Somme parziali di e^x)

$$e^T := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{T^k}{k!} \quad \text{esp. di } T.$$

UG - 3 $\quad$ 14.30

22/12/201

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \qquad \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

Proprietà (si mostra con prodotto di Cauchy):

- $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA} = e^{tA}e^{sA}$ $\qquad [e^{A+B} \neq e^A e^B]$

  $=$ vero se $AB = BA$

  $x, y \in \mathbb{R}$ possono essere pensate come matrici 1×1 che in effetti commutano

- Se $t = -s$ $\qquad I = e^{sA}e^{-sA} = e^{-sA}e^{sA} \Rightarrow (e^{sA})^{-1} = e^{-sA}$

  $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \qquad [e^{0\cdot A} = I]$

  $s \mapsto e^{sA}$ gruppo a un parametro di operatori

- $\frac{d}{dt}e^{tA} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = Ae^{tA} = e^{tA}A$ $\qquad$ (dalla def. di e^{tA} commutatività)

  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ spazio normato con la norma operatoriale

$$\left|\left|\left| \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} - Ae^{tA} \right|\right|\right| \underset{(*)}{=} \left|\left|\left| e^{tA}\left[\frac{e^{hA} - I}{h} - A\right] \right|\right|\right| \le$$

$$\le |||e^{tA}|||\ \left|\left|\left| \frac{e^{hA} - I}{h} - A \right|\right|\right| \le |||e^{tA}|||\ \frac{1}{|h|} \sum_{k=2}^{+\infty} \left|\left|\left| \frac{(hA)^k}{k!} \right|\right|\right|$$

$$e^{hA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(hA)^k}{k!} = I + hA + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(hA)^k}{k!}$$

$$\frac{e^{hA} - I}{h} - A = \frac{1}{h} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(hA)^k}{k!} \qquad (*)$$

$$\le |||e^{tA}||| \underbrace{\frac{h^2}{|h|}}_{\to 0} \sum_{k=2}^{+\infty} \underbrace{|h|^{k-2}}_{\le 1} \underbrace{\frac{|||A|||^k}{k!}}_{\text{serie convergente}}$$

Prop. Per ogni $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$ la funzione $e^{tA}\underline{c}$ (vettore che dipende da t: poiché e^{tA} è una matrice) risolve il (PC) $\begin{cases} \underline{x}' = A\underline{x} \\ \underline{x}(0) = \underline{c} \end{cases}$

Dim. $\varphi(0) = e^{0\cdot A}\underline{c} = I\underline{c} = \underline{c}$

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}(e^{tA}\underline{c}) = \left(\frac{d}{dt}e^{tA}\right)\underline{c} = Ae^{tA}\underline{c} = A\varphi(t)$$

Oss. $\underline{x}(t_0) = \underline{c}$

$\tilde{\varphi}(t) = e^{(t-t_0)A}\underline{c}$

SERIE DI FUNZIONI

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = f(x)$

converge su $[a,1]\cup[1,2]$

Valutiamo $f\left(\frac{3}{2}\right)$ con un err. di 10^{-2}

1] C. L. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{(x-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{b_n}$

- $b_n \mapsto 0$
- b_n decrescente

$\Downarrow$

$|s - s_n| \le b_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$|f(x) - s_n(x)| \le (x-1)^{n+1} \log\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \quad \forall x \in [1,2] \; \forall n \in \mathbb{N}$

$0 \le \sup_{[1,2]} |f(x) - s_n(x)| \le \left(\sup_{[1,2]} (x-1)^{n+1}\right) \log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$

$= \log\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[n\mapsto+\infty]{} 0$

2] $|f(x) - s_n(x)| \le b_{n+1}$ per C. L.

$\left|f\left(\frac{3}{2}\right) - s_n\left(\frac{3}{2}\right)\right| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \log\left(1+\frac{1}{1+n}\right) < 10^{-2}$ (Completare con la ricerca del primo n per cui la dise è verificata)

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

Convergenza puntuale: $x \in \mathbb{R}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ converge per $x > 1$

Convergenza uniforme: Fissiamo $\delta > 1$ $[\delta, +\infty)$

$\sup_{[\delta,+\infty)} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^\delta}$ ($\frac{1}{n^x}$ è decrescente!)

$\downarrow$

Converge perché $\delta > 1$

C. di Weierstrass

$\Rightarrow$ conv. uniforme

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \sqrt{n^2-1}\right)^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)^x} \sim \frac{1}{(2n)^x}$

Da sopra segue la conv. unif. della serie per $[\delta, +\infty)$

RICORDA!: $\sum a_n \quad \sum b_n \quad a_n, b_n \ge 0$

$\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

le due serie hanno lo stesso carattere

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \log \sqrt[n]{1+\frac{x}{n}}$

C.P. $\forall n \in \mathbb{N}$, $1+\frac{x}{n} > 0 \iff x > -n$

$D_n = (-n, +\infty)$

$D = (-1, +\infty)$ dominio della somma

$$\log \sqrt[n]{1+\frac{x}{n}} = \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{x}{n}\right) \sim \frac{x}{n^2}$$

Prop. $\sum f_n$ conv. unif. in E $\Rightarrow$ $f_n \xrightarrow{unif.} 0$ in E

Mostriamo se $f_n \xrightarrow{unif.} 0$

$\sup_{(-1,+\infty)} \left|\log \sqrt[n]{1+\frac{x}{n}}\right| = +\infty$

Mostriamo se $f_n \xrightarrow{unif} 0$ su $[a,b]$

$$\sup_{[a,b]} \left|\log \sqrt[n]{1+\frac{x}{n}}\right| = \max_{[a,b]} \left|\log \sqrt[n]{1+\frac{x}{n}}\right| \underset{\substack{\downarrow \\ \text{no pti staz. max } [a,b]}}{=} \max\left\{ \underbrace{\left|\log \sqrt[n]{1+\frac{a}{n}}\right|}_{(*)}, \underbrace{\left|\log \sqrt[n]{1+\frac{b}{n}}\right|}_{(**)} \right\}$$

Le due serie (*) e (**) convergono, conv. il max.

Su $[a,b]$ la serie converge.

Ex. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-n|x^2-x|}}{n\log^2 n}$

C.P. criterio della radice

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{-n|x^2-x|}}{n\log^2 n}} = e^{-|x^2-x|}$

$\lim_{n\to+\infty} e^{-|x^2-x|} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n\log^2 n}} = e^{-|x^2-x|} \iff \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n\log^2 n} = 1$

$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\log(n\log^2 n)}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\log n}{n}} \cdot e^{\frac{\log(\log^2 n)}{n}} = 1$

$e^{-|x^2-x|} < 1 \iff -|x^2-x| < 0 \iff \forall x \notin \{0,1\} \Rightarrow$ C.P.

$x = 0$ o $x = 1$ $\quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log^2 n}$ converge

$\left(\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log^2(x)}\,dx > \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log^2 n} \right.$: l'esistenza dell'int. imp. $\Rightarrow$ convergenza della serie

$\left. \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log^2(x)}\,dx = -\frac{1}{\log(x)}\Big]_2^{+\infty} = \frac{1}{\log 2} \right)$

C.U. $\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{e^{-n|x^2-x|}}{n\log^2 n} = \frac{1}{n\log^2 n} \underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{-n|x^2-x|}}_{\text{funz. decrescente}} = \frac{1}{n\log^2 n}$

Tale serie (la serie dei sup) converge, dunque

$\sum f_n$ c.u.

$$\frac{(-1)^n}{n^x+(\log n)^x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$$

- $x \leq 0$ non converge perché il termine generale non conv.
  $x > 0$ convergenza per il criterio di Leibniz.

- $\sup_{(0,+\infty)} \left| \frac{(-1)^n}{n^x+(\log n)^x} \right| = \sup_{(0,+\infty)} \frac{1}{n^x+(\log n)^x} = \frac{1}{2} \neq 0$. Il probl. è in 0 valutiamo la C.U. su $[\delta,+\infty)$

  $\sup_{[\delta,+\infty)} \frac{1}{n^x+(\log n)^x} = \frac{1}{n^\delta+(\log n)^\delta}$ (calcola...)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sin x)^{n+1}}{e^{nx^2}}$$

P. Verifichiamo C.A. (conv. assoluta) con crit. della radice

$$\lim_n \sqrt[n]{\left| \frac{(\sin x)^{n+1}}{e^{nx^2}} \right|} = \lim_n \left| \frac{\sin x}{e^{x^2}} \right|^{\frac{n+1}{n}} = \frac{|\sin x|}{e^{x^2}} < 1$$

(per qualsiasi valore di x)

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ C.P.

U. ($|x| \leq \frac{1}{2}$; in realtà $|x| \leq a < 1$) $|x| \leq \frac{1}{2}$

$$|\sin x| \leq |x| \Rightarrow |f_n(x)| \leq \frac{|x|}{1}^{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \leq \frac{1}{2}} |f_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \longrightarrow \text{conv. unif.}$$

$|x| > \frac{1}{2}$ $\quad \left| \frac{\sin x}{e^{nx^2}} \right|^{n+1} \leq \frac{1}{e^{n/4}} = (e^{-\frac{1}{4}})^n \longrightarrow$ conv. unif.